TÉCNICO LISBOA

Propagação & Antenas

Docente Responsável: **Prof. Carlos R. Paiva**

Duração: 1 hora 30 minutos **15 de Janeiro de 2019**

Ano Lectivo: 2018 / 2019 **SEGUNDO TESTE**

---

1. Uma placa dieléctrica de diamante, com um índice de refracção $n_1 = 2.4$ e uma espessura $d = 0.6\ \text{mm}$, encontra-se assente sobre um plano condutor eléctrico perfeito em $x = 0$. O meio superior, para $x > d$, é o ar (com um índice de refracção $n_2 = 1$). Considere que esta estrutura funciona como guia de ondas superficiais com $\exp\left[i\left(\beta z - \omega t\right)\right]$.

a) Determine a banda de frequências $f_1 < f < f_2$ em que, neste guia de ondas, se propagam os dois primeiros modos superficiais (i.e., o TM_0 e o TE_1). Justifique a sua resposta com um diagrama de dispersão $b - \text{versus} - v$ no intervalo $0 \le v \le 3\pi/2$.

b) Para $f = 100\ \text{GHz}$, calcule o índice de refracção modal ou efectivo $n_{\text{eff}} = \beta/k_0$ correspondente aos dois modos superficiais que se podem propagar neste guia de ondas. Qual é, neste caso, a velocidade de fase e o comprimento de onda (dentro do guia) de cada um desses modos? Acompanhe a sua resolução com uma representação gráfica apropriada.

c) Suponha que, neste guia, consegue excitar os modos TE sem excitar os modos TM. Nestas condições pretende-se, então, blindar o guia. Esta blindagem faz-se colocando um novo plano condutor eléctrico perfeito a uma altura $x = H$. Considera-se, como critério prático de blindagem, que a intensidade da componente $E_y\left(x, z, t\right)$ do campo electromagnético, na altura $x = H$, se encontre atenuada 35 dB em relação ao seu valor na interface (na situação de guia aberto, i.e., sem a blindagem). Determine H para $f = 100\ \text{GHz}$.

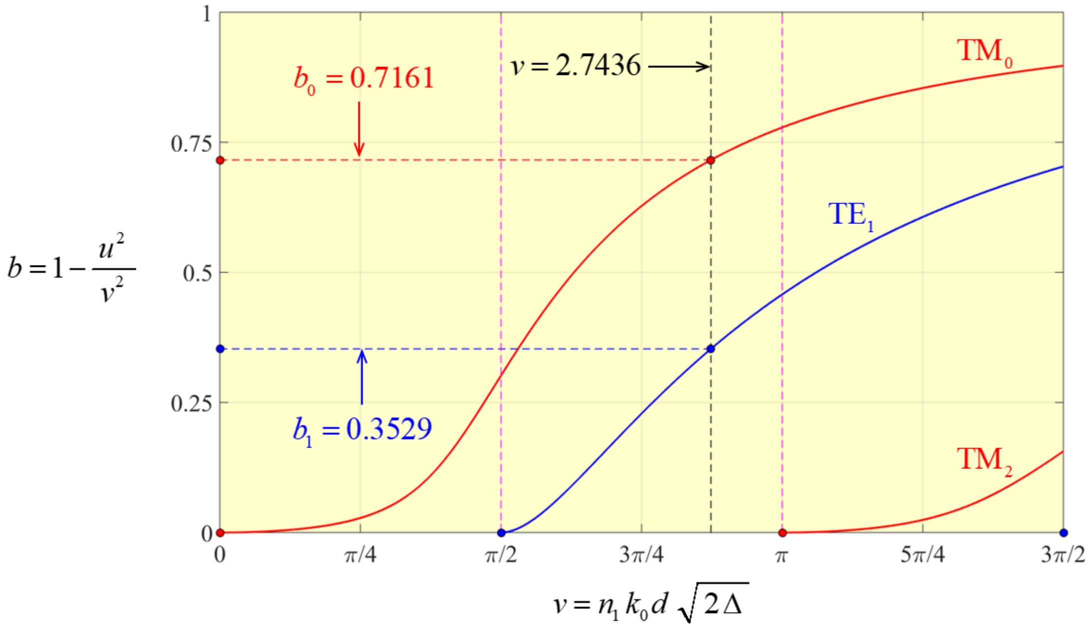
Solução

a) Para os dados considerados, vem

$$\boxed{c = 299\,792\,458\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}} \to \left[\begin{array}{l} \lambda = \dfrac{c}{f} = 2.9979\ \text{mm} \\[2ex] \Delta = \dfrac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} = 0.4132 \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{v = 2\pi n_1 \dfrac{d}{\lambda}\sqrt{2\Delta} = 2.7436}$$

$$\boxed{\frac{\pi}{2} = v_1 < v < v_2 = \pi} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{TM}_0 + \text{TE}_1}$$

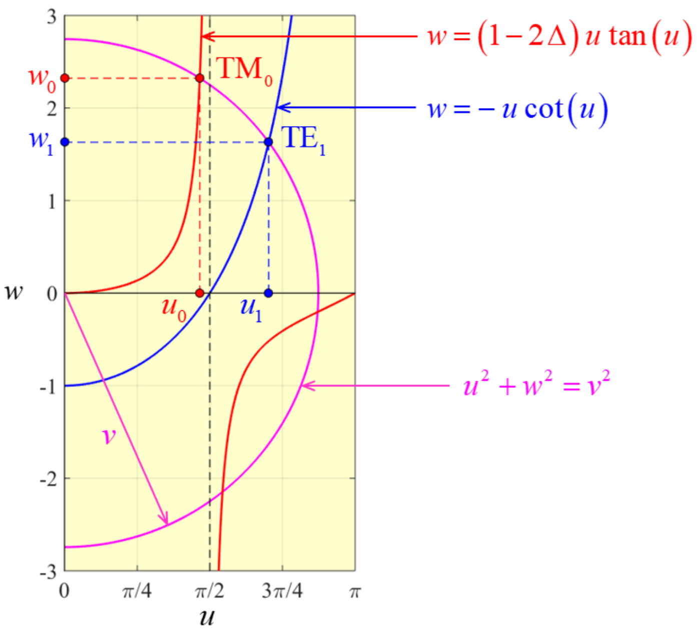
$$\therefore \quad \boxed{f_1 < f < f_2} \quad \mapsto \quad \boxed{\begin{array}{l} f_1 = \dfrac{c}{4 n_1 d \sqrt{2\Delta}} = 57.2540 \text{ GHz} \\ f_2 = 2 f_1 = 114.5080 \text{ GHz} \end{array}} .$$



b) A solução modal correspondente aos dois modos que se propagam (o TM_0 e o TE_1) está ilustrada na figura anexa.

$$\boxed{TM_0} \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} u_0 = 1.4619 \\ w_0 = 2.3216 \end{array}} \rightarrow \boxed{b_0 = 1 - \dfrac{u_0^2}{v^2} = 0.7161} \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \lambda_{g0} = \dfrac{2\pi d}{\sqrt{\dfrac{v^2}{2\Delta} - u_0^2}} = 1.4278 \text{ mm} \\ v_{p0} = f\,\lambda_{g0} = 1.4278 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ \left(n_{eff}\right)_0 = \dfrac{\lambda}{\lambda_{g0}} = 2.0996 \end{array}}$$

$$\boxed{TE_1} \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} u_1 = 2.2069 \\ w_1 = 1.6299 \end{array}} \rightarrow \boxed{b_1 = 1 - \dfrac{u_1^2}{v^2} = 0.3529} \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \lambda_{g1} = \dfrac{2\pi d}{\sqrt{\dfrac{v^2}{2\Delta} - u_1^2}} = 1.8313 \text{ mm} \\ v_{p1} = f\,\lambda_{g1} = 1.8313 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ \left(n_{eff}\right)_1 = \dfrac{\lambda}{\lambda_{g1}} = 1.6371 \end{array}}$$



c) Para simplificar a notação vai-se omitir o factor omnipresente $\exp[i(\beta z - \omega t)]$. Assim, tem-se

$$\boxed{\mathrm{X} = \frac{x}{d}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_y(\mathrm{X}) = \begin{cases} \mathsf{A}\sin(u_1\mathrm{X}), & 0 \le \mathrm{X} \le 1 \\ \mathsf{A}\sin(u_1)\exp[-w_1(\mathrm{X}-1)], & 1 \le \mathrm{X} \end{cases}}\,.$$

Vem, então,

$$\boxed{\mathrm{TE}_1} \quad \mapsto \quad \boxed{w_1 = 1.6299} \quad \mapsto \quad \boxed{\alpha_1 = \frac{w_1}{d} = 2.7165\times10^3\ \mathrm{Np\cdot m^{-1}}}\,.$$

$$\frac{E_y(x=d)}{E_y(x=H)} = \exp\left[w_1\left(\frac{H}{d}-1\right)\right] \quad \Rightarrow \quad 20\log_{10}\left\{\exp\left[w_1\left(\frac{H}{d}-1\right)\right]\right\} = 35\ \mathrm{dB}$$

$$\therefore \quad \boxed{H = d\left[1 + \frac{1.75}{w_1}\ln(10)\right] = 2.0833\ \mathrm{mm}}\,.$$

2. Pretende-se sintetizar um agregado linear de $N=5$ antenas com um desfasamento progressivo α das correntes de alimentação e um espaçamento uniforme d entre elementos. Tem-se (coordenadas esféricas) $u=k_0 d\cos(\psi)-\alpha$. No plano equatorial, em que $\theta=\pi/2$, é $\psi=\phi\in[0,2\pi[$.

a) Para uma excitação simétrica da forma $1:\mathsf{A}_1:\mathsf{A}_2:\mathsf{A}_1:1$, mostre que é possível escrever o diagrama de potência $P(\xi)$ em termos de duas constantes c_1 e c_2, tais que $F(u)=F_1(u)\,F_2(u)$ com $F_i(u)=1+c_i e^{-iu}+e^{-2iu}$ onde $i\in\{1,2\}$ e tendo-se $u=k_0 d\cos(\psi)-\alpha$. Fazendo $P(\xi)=F(u)\,F^*(u)$, com $u=2\cos(\xi)$, determine a forma mais simples de $P(\xi)$. Determine a relação entre os coeficientes c_1 e c_2 e os coeficientes A_1 e A_2.

b) Para um agregado uniforme determine os coeficientes c_1 e c_2. Admitindo que tem $d/\lambda=3/4$ e $\alpha=\pi$, calcule $P(\xi)$ para $-2\le\xi\le 2$ e $F(u)$ no domínio visível. Represente graficamente $P(\xi)$ e $\mathscr{F}(u)=|F(u)|$. Desenhe, então, o diagrama de radiação $\mathscr{F}(\phi)$ para $0\le\phi<2\pi$.

c) Determine (em graus) todos os zeros e máximos locais do diagrama de radiação. Determine, ainda, os dois níveis de lobos secundários $\mathsf{SLL}_i=20\log_{10}(\mathscr{F}_i/\mathscr{F}_{\max})$, com $i\in\{1,2\}$.

Solução

a) Comecemos por notar que

$$u=2\pi\frac{d}{\lambda}\cos(\psi)-\alpha$$

$$F(u)=1+\mathsf{A}_1\,e^{-iu}+\mathsf{A}_2\,e^{-2iu}+\mathsf{A}_1\,e^{-3iu}+e^{-4iu}$$

$$\therefore\quad F(u)=1+(c_1+c_2)\,e^{-iu}+(2+c_1c_2)\,e^{-2iu}+(c_1+c_2)\,e^{-3iu}+e^{-4iu}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\mathsf{A}_1&=c_1+c_2\ge 0\\ \mathsf{A}_2&=2+c_1c_2\ge 0\end{aligned}}\,.$$

$$-2\le u=2\cos(\xi)\le 2\quad\mapsto\quad P(\xi)=\left[\xi^2+(c_1+c_2)\,\xi+c_1\,c_2\right]^2$$

$$\therefore\quad\boxed{P(\xi)=(\xi+c_1)^2\,(\xi+c_2)^2}\,.$$

$$\boxed{\textbf{nulos}}\quad\mapsto\quad\boxed{\begin{aligned}\xi&=-c_1\\ \xi&=-c_2\end{aligned}}$$

$$\boxed{\mathsf{SLL}_1}\quad\mapsto\quad\boxed{\frac{dP}{d\xi}=0}\quad\Rightarrow\quad\boxed{\xi=\xi_1=-\frac{1}{2}(c_1+c_2)}\quad\Rightarrow\quad\boxed{P_1=P(\xi_1)=\frac{1}{16}(c_1-c_2)^2}$$

$$\boxed{\mathsf{SLL}_2}\quad\mapsto\quad\boxed{\xi=\xi_2=-2}\quad\Rightarrow\quad\boxed{P_2=P(\xi_2)=(c_1-2)^2\,(c_2-2)^2}$$

$$\boxed{\xi=\xi_m=2}\quad\Rightarrow\quad\boxed{P_{\max}=P(\xi_m)=(2+c_1)^2\,(2+c_2)^2}$$

$$\boxed{\mathscr{F}(u)=\sqrt{P(u)}=\left|4\cos^2(u)+2(c_1+c_2)\cos(u)+c_1c_2\right|}.$$

b) Agregado uniforme:

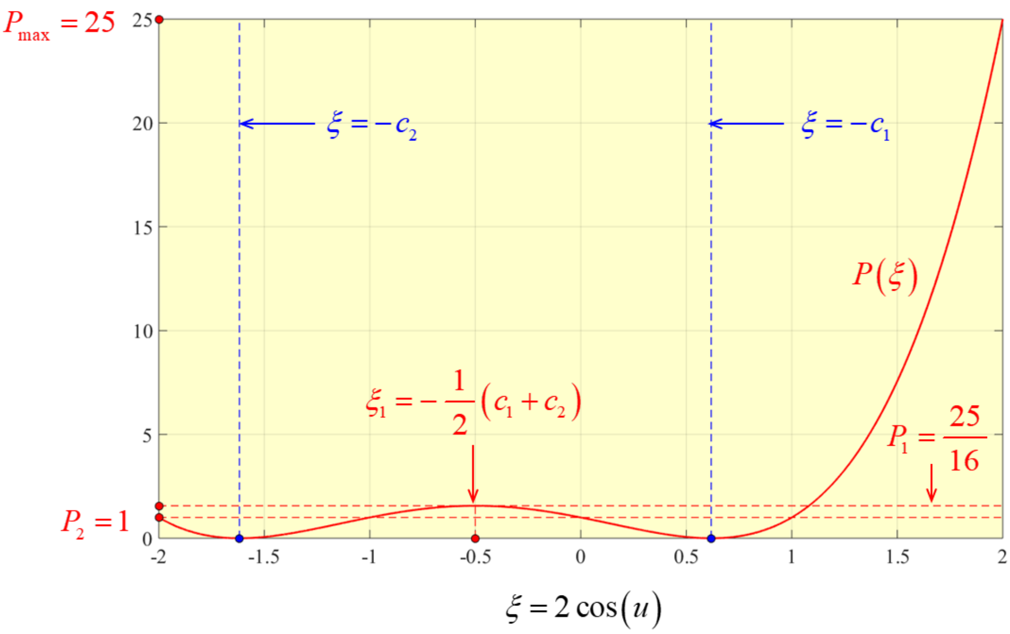
$$i\in\{1,2\}\quad\mapsto\quad\boxed{A_1=A_2=1}\quad\Rightarrow\quad\boxed{\begin{array}{l}c_1+c_2=1\\ c_1c_2=-1\end{array}}\quad\Rightarrow\quad\boxed{c_i^2-c_i-1=0}$$

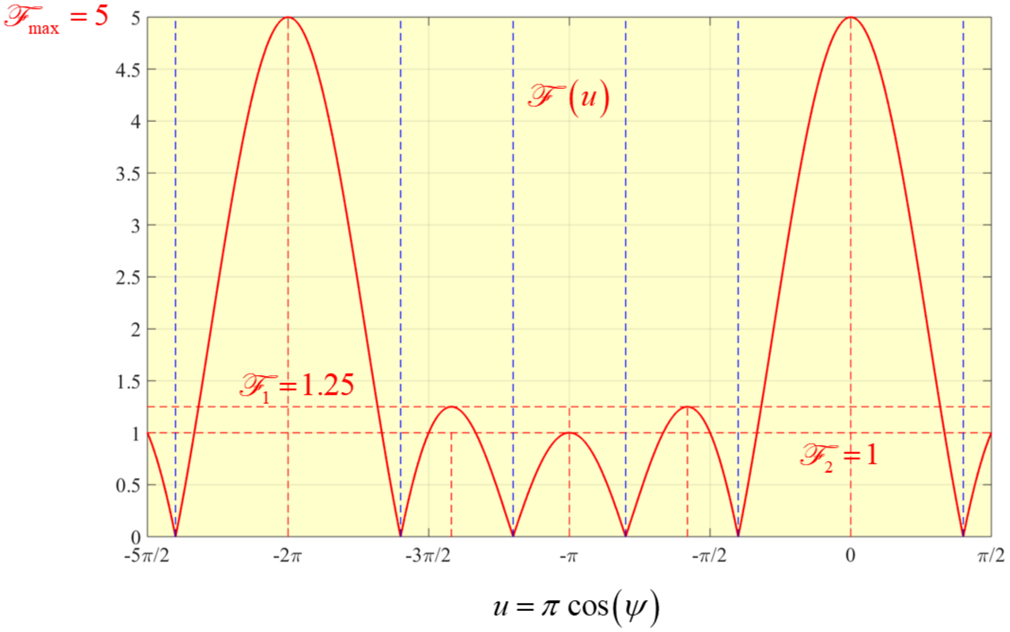
$$\therefore\quad\boxed{\begin{array}{l}c_1=\dfrac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)\\ c_2=\dfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)=\varphi\end{array}}\quad\left(\varphi\ \mapsto\ \text{golden ratio}\right)$$

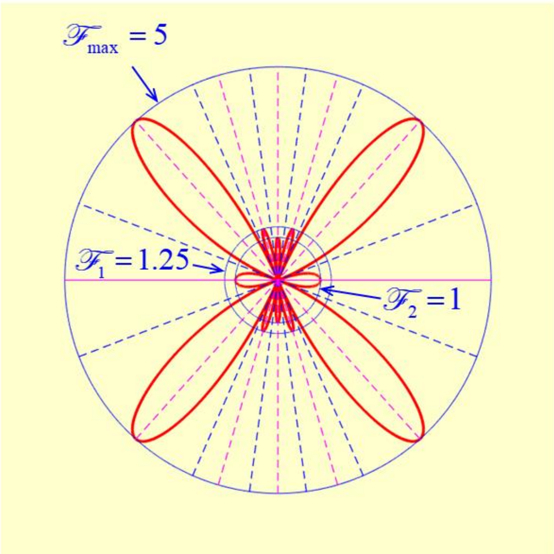
$$\boxed{\begin{array}{c}d=\dfrac{3}{4}\lambda\\ \alpha=\pi\end{array}}\quad\Rightarrow\quad\boxed{\dfrac{u}{\pi}=\dfrac{3}{2}\cos(\phi)-1}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\textbf{domínio}\\ \textbf{visível}\end{array}}\quad\Rightarrow\quad\boxed{-\dfrac{5\pi}{2}=u_1\le u\le u_2=\dfrac{\pi}{2}}$$

$$\boxed{P(\xi)=\left(\xi^2+\xi-1\right)^2}\quad\mapsto\quad\boxed{\mathscr{F}(u)=\left|4\cos^2(u)+2\cos(u)-1\right|}$$







c) Valores numéricos (só se apresentam os valores para $0 \le \phi \le 180^\circ$):

$$\boxed{\textbf{nulos}} \mapsto \boxed{\begin{aligned} \phi_1 &= 21.0395^\circ \\ \phi_2 &= 66.4218^\circ \\ \phi_3 &= 82.3377^\circ \\ \phi_4 &= 97.6623^\circ \\ \phi_5 &= 113.5782^\circ \\ \phi_6 &= 158.9605^\circ \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\textbf{máximos}\\ \textbf{e}\\ \textbf{máximos locais}\end{array}} \mapsto \boxed{\begin{aligned} \phi_{m1} &= 0^\circ \\ \phi_{m2} &= 48.1897^\circ \ (\max) \\ \phi_{m3} &= 73.7569^\circ \\ \phi_{m4} &= 90^\circ \\ \phi_{m5} &= 106.2431^\circ \\ \phi_{m6} &= 131.8103^\circ \ (\max) \\ \phi_{m7} &= 180^\circ \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\textbf{níveis de}\\ \textbf{lobos secundários}\end{array}} \mapsto \boxed{\begin{aligned} \mathsf{SLL}_1 &= 10\log_{10}\left(\frac{P_1}{P_{\max}}\right) = 10\log_{10}\left(\frac{1}{16}\right) = -\ 12.0412 \text{ dB} \\ \mathsf{SLL}_2 &= 10\log_{10}\left(\frac{P_2}{P_{\max}}\right) = 10\log_{10}\left(\frac{1}{25}\right) = -\ 13.9794 \text{ dB} \end{aligned}}$$

---

3. Neste problema pretende-se repetir o problema anterior, mas agora para um agregado de Dolph--Chebyshev em que $\mathsf{SLL}_1 = \mathsf{SLL}_2 = -\,20\log_{10}(R)$.

a) Comece por deduzir o sistema de duas equações a duas incógnitas que permite, então, calcular os coeficientes c_1 e c_2 neste caso.

b) Notando que para se ter $R = 1.5$ as soluções do sistema da alínea anterior são $c_1 = -1.2239$ e $c_2 = 1.4469$, calcule e represente graficamente $P(\xi)$ para $-2 \le \xi \le 2$.

c) Designando o domínio visível por $u_1 \le u \le u_2$, determine u_1/π e u_2/π de forma a que $\mathscr{F}_{\max}/\mathscr{F}_{\text{front}} = \mathscr{F}_{\max}/\mathscr{F}_{\text{rear}} = R = 1.5$. Tem-se $\mathscr{F}_{\text{front}} = \mathscr{F}(\phi = 0^\circ)$ e $\mathscr{F}_{\text{rear}} = \mathscr{F}(\phi = 180^\circ)$. Diga, também, quais os valores de d/λ e de α nestas condições.

d) Desenhe o diagrama de radiação $\mathscr{F}(\phi)$ para $0 \le \phi < 2\pi$. Determine (em graus) todos os zeros e máximos locais do diagrama de radiação.

Solução

a) A imposição básica é a seguinte:

$$\boxed{\frac{P_1}{P_{\max}} = \frac{P_1}{P_{\max}} = \frac{1}{R^2}}$$

$$\therefore \quad \boxed{\mathrm{SLL} = \mathrm{SLL}_1 = \mathrm{SLL}_2 = -\,20\log_{10}\left(R\right)} \, .$$

Daqui resulta imediatamente (ver as expressões deduzidas na primeira alínea do problema anterior):

$$\left(\frac{1}{R}\right)^2 = \frac{\left(c_1 - c_2\right)^2}{16\left(c_1+2\right)^2\left(c_2+2\right)^2} = \frac{\left(c_1-2\right)^2\left(c_2-2\right)^2}{\left(c_1+2\right)^2\left(c_2+2\right)^2}$$

$$\begin{cases} 16\left(c_1+2\right)^2\left(c_2+2\right)^2 = R^2\left(c_1-c_2\right)^2 \\ \left(c_1+2\right)^2\left(c_2+2\right)^2 = R^2\left(c_1-2\right)^2\left(c_2-2\right)^2 \end{cases}$$

$$\boxed{R = 1.5} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{c} c_1 = -1.2239 \\ c_2 = 1.4469 \end{array}} \, .$$

b) Recordemos a expressão geral:

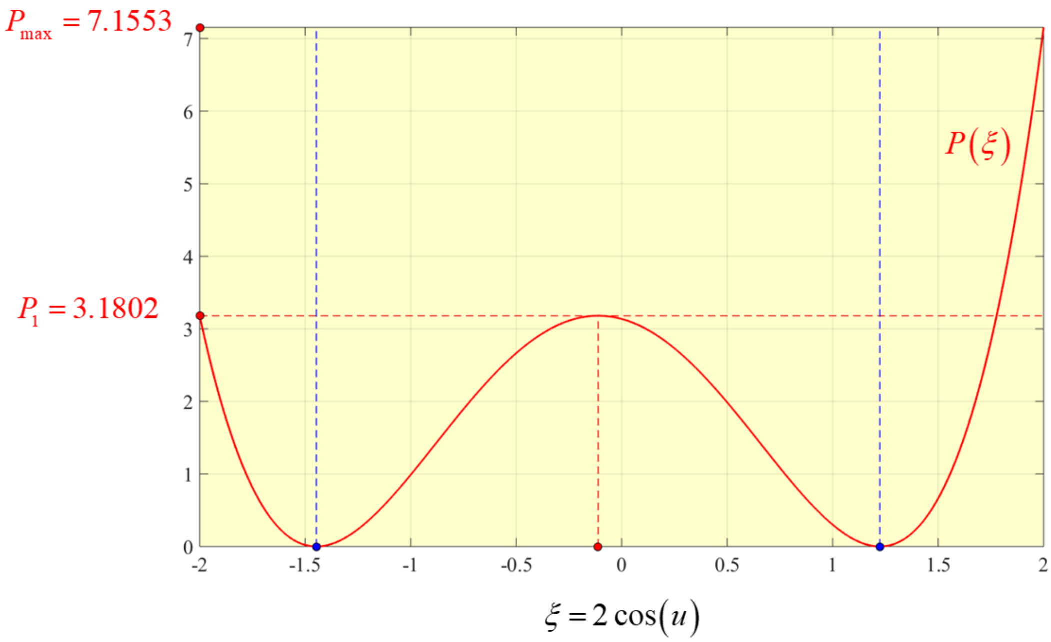
$$\boxed{P\left(\xi\right) = \left(\xi + c_1\right)^2\left(\xi + c_2\right)^2} \, .$$

Fazendo

$$\boxed{\begin{array}{c} S = c_1 + c_2 = 0.2229 \\ D = c_1 - c_2 = -\,2.6708 \\ P = c_1\, c_2 = -1.7709 \end{array}}$$

vem

$$\mathscr{F}\left(\xi\right) = \left|\,\xi^2 + S\,\xi + P\,\right| .$$



c) A imposição, para determinar o domínio visível, é a seguinte:

$$\boxed{\frac{\mathscr{F}_{\text{front}}}{\mathscr{F}_{\max}} = \frac{\mathscr{F}_{\text{rear}}}{\mathscr{F}_{\max}} = \frac{1}{R}}\,.$$

Vem, então,

$$u = 2\pi \frac{d}{\lambda}\cos(\psi) - \alpha\,.$$

Ao analisar-se a função $\mathscr{F}(\xi)$ obtém-se o gráfico anexo (ver página seguinte). O domínio visível corresponde ao intervalo

$$\left[\begin{array}{l} u_1 = -2\pi \dfrac{d}{\lambda} - \alpha \\ u_2 = 2\pi \dfrac{d}{\lambda} - \alpha \end{array}\right. \quad \mapsto \quad u \in [u_1, u_2]\,.$$

Escolhendo, então, a solução indicada no gráfico, i.e.,

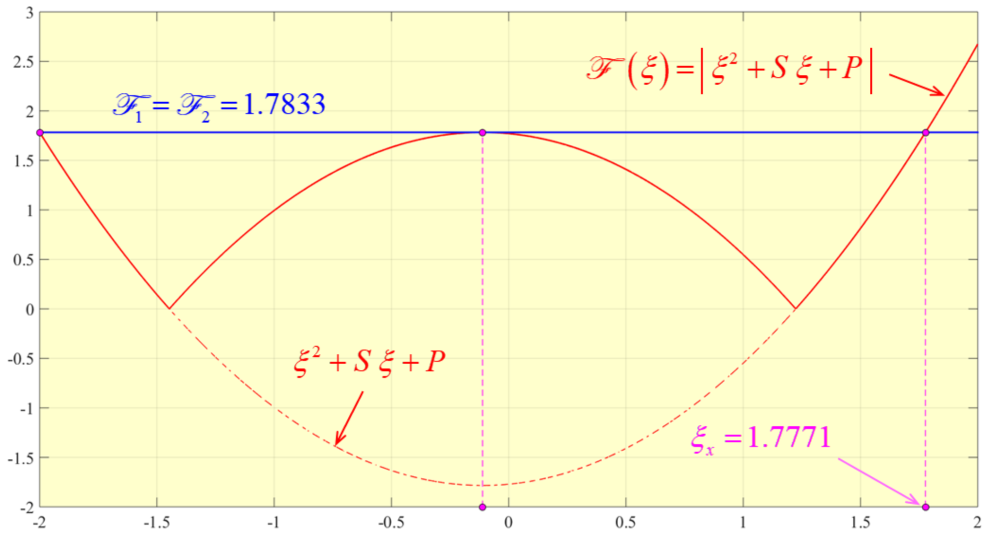
$$\boxed{\xi_x = 2\cos(\theta) = 1.7771} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta = 0.4766 \text{ rad}}\,,$$

infere-se que

$$\boxed{u_2 = 2n\pi \pm \theta} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d}{\lambda} = \frac{1}{2\pi}\left(u_2 + \alpha\right)}.$$

Logo, escolhendo (tal como no problema anterior) $\alpha = \pi$, obtém-se (com o sinal + para θ)

$$\boxed{n = 0} \quad \mapsto \quad \boxed{u_2 = \theta} \quad \mapsto \quad \boxed{\begin{array}{c} \alpha = \pi \\ d = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\theta}{2\pi}\right)\lambda = 0.5759\,\lambda \end{array}}.$$



$$\xi = 2\cos(u)$$

Note-se, porém, que não era obrigatório escolher $\alpha = \pi$. Qualquer outra escolha seria possível. Por exemplo: ao escolher $\alpha = 0$, teria de se considerar (para não ter elementos do tipo dipolo eléctrico de Hertz)

$$\boxed{n = 1} \quad \mapsto \quad \boxed{u_2 = \theta + 2\pi} \quad \mapsto \quad \boxed{\begin{array}{c} \alpha = 0 \\ d = \left(1 + \dfrac{\theta}{2\pi}\right)\lambda = 1.0759\,\lambda \end{array}}.$$

Outro exemplo: se se fizer $\alpha = \pi/2$, viria

$$\boxed{n=0} \quad \mapsto \quad \boxed{u_2=\theta} \quad \mapsto \quad \boxed{\begin{gathered} \alpha=\frac{\pi}{2} \\ d=\left(\frac{1}{4}+\frac{\theta}{2\pi}\right)\lambda=0.3259\,\lambda \end{gathered}}\,.$$

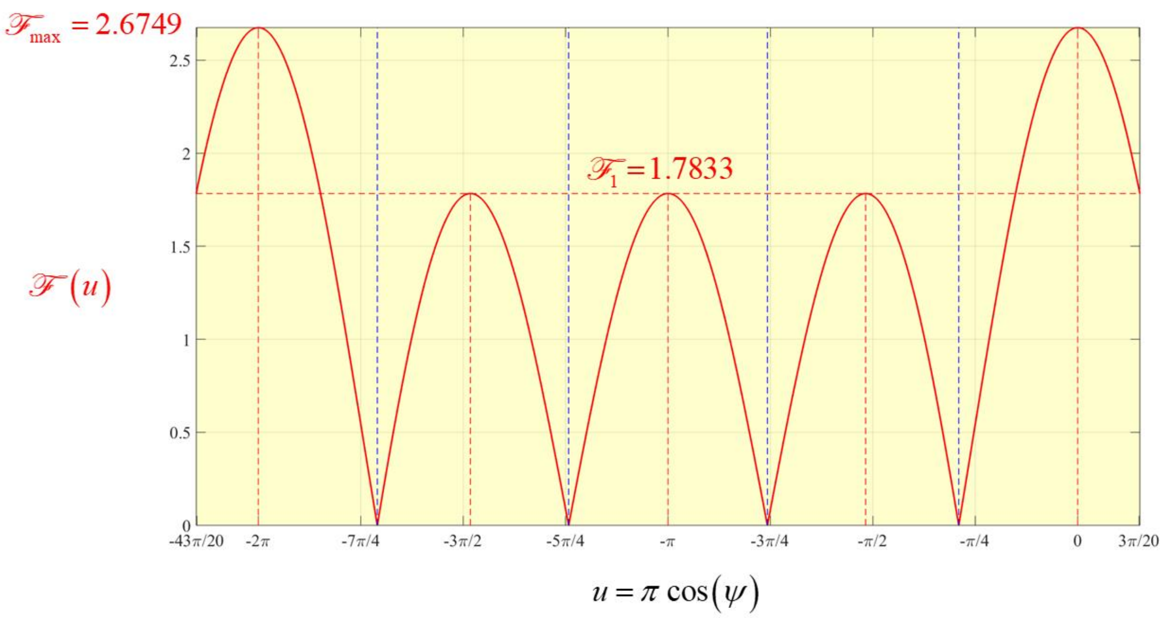
Caso geral:

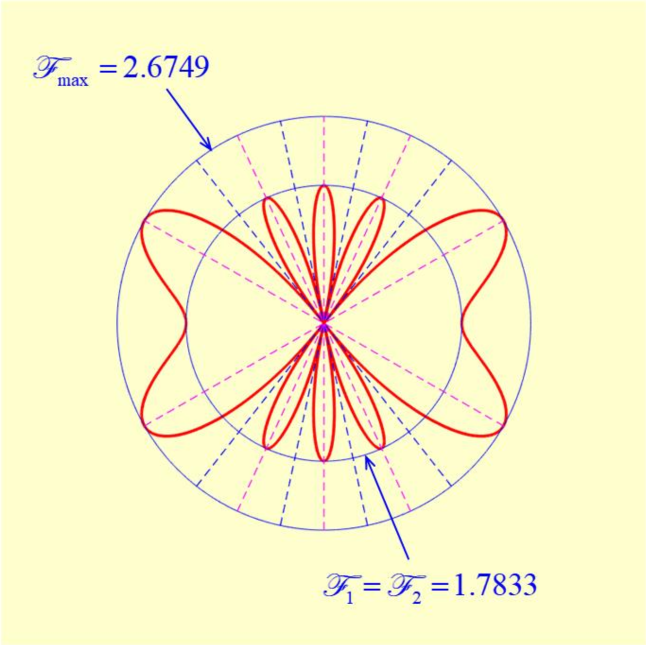
$$\boxed{d=\left(n+\frac{\alpha\pm\theta}{2\pi}\right)\lambda} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} u_2&=2n\pi\pm\theta \\ u_1&=-u_2-2\alpha \end{aligned}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\begin{gathered} u_2-u_1=4\pi\,\frac{d}{\lambda}=2\left(u_2+\alpha\right) \\ u_2+u_1=-2\alpha \end{gathered}}\,.$$

Ou seja: adopta-se, doravante, a solução em que

$$\boxed{\begin{gathered} \alpha=\pi \\ n=0 \\ \text{sinal } + \end{gathered}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{d=\left(\frac{1}{2}+\frac{\theta}{2\pi}\right)\lambda=0.5759\,\lambda} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{gathered} u_1=-\theta-2\pi=-6.7598\text{ rad}\approx-\frac{43\pi}{20} \\ u_2=\theta=0.4766\text{ rad}\approx\frac{3\pi}{20} \end{gathered}}\,.$$

d) Para desenhar o diagrama de radiação há que, em primeiro lugar, desenhar o diagrama de $\mathscr{F}(u)=\left|F(u)\right|=\sqrt{P(u)}$. As duas figuras anexas ilustram a resposta pretendida.





$$\boxed{\textbf{nulos}} \quad \mapsto \quad \boxed{\begin{array}{l} \phi_1 = 51.9649^\circ \\ \phi_2 = 77.8418^\circ \\ \phi_3 = 102.1582^\circ \\ \phi_4 = 128.0351^\circ \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \textbf{máximos} \\ \textbf{e} \\ \textbf{máximos locais} \end{array}} \quad \mapsto \quad \boxed{\begin{array}{l} \phi_{m1} = 29.7420^\circ \ (\max) \\ \phi_{m2} = 65.2459^\circ \\ \phi_{m3} = 90^\circ \\ \phi_{m4} = 114.7541^\circ \\ \phi_{m5} = 150.2580^\circ \ (\max) \end{array}}$$

$$\therefore \quad \boxed{\mathrm{SLL} = \mathrm{SLL}_1 = \mathrm{SLL}_2 = -20\log_{10}(R) = -3.5218\ \mathrm{dB}} \, .$$